গণিতপরিক্রমা ২৭শ খণ্ড ২০১৭ পৃ. ২৩-২৬

সংখ্যার জগতে উঁকিঝুঁকি

মুনিবুর রহমান চৌধুরী

গণিত কথাটি এসেছে গণনা থেকে। গণনার জন্য 1, 2, 3, 4, 5, ... সংখ্যাগুলির উদ্ভব হয়েছে। এদের স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়। প্রাচীন ভারতবর্ষে উদ্ভাবিত দশগুণোত্তর বা দশমিক পদ্ধতিতে 0 (শূন্য) সহ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 এই দশটি সংখ্যার মাধ্যমে সকল সংখ্যাকে লেখা হয়। সংখ্যা লেখার পদ্ধতিকে সংখ্যাপাতন বলা হয়। দশমিক পদ্ধতিতে 9 এর পরবর্তী সংখ্যা দশকে 10 রূপে লেখা হয়। এই পদ্ধতির সঙ্গে আমরা আবাল্য পরিচিত বলে, এর মাহাত্ম্য হয়তো আমরা উপলব্ধি করি না। রোমান সংখ্যাপাতন পদ্ধতির সঙ্গে তুলনা করলেই আমরা দশমিক পদ্ধতির সুবিধা ও শ্রেষ্ঠত্ব বুঝতে পারব। এই নিবন্ধে আমরা বিশেষ দুই ধরনের সংখ্যা নিয়ে আলোচনা করব।

1 এর চেয়ে বড় যে সংখ্যা শুধুমাত্র 1 এবং ঐ সংখ্যাটি দ্বারা (নিঃশেষে) বিভাজ্য, তাকে মৌলিক সংখ্যা বলা হয়। প্রথম মৌলিক সংখ্যাটি হচ্ছে 2; এটি একমাত্র জোড় মৌলিক সংখ্যা। 50 এর অনূর্ধ্ব মৌলিক সংখ্যাগুলি হচ্ছে 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. প্রশ্ন জাগে, মৌলিক সংখ্যার শেষ আছে কী? উত্তর যদি নেতিবাচক হয়, তাহলে একে একে নতুন নতুন মৌলিক সংখ্যা বের করে এই প্রশ্নের মীমাংসা কখনই করা যাবে না। কেননা মানুষ যতই নতুন নতুন মৌলিক সংখ্যা বের করুক না কেন, তাদের সংখ্যা কখনই অন্তহীন হতে পারবে না। অতএব ঐ প্রশ্নের উত্তর নেতিবাচক হলে, তার মীমাংসা যুক্তির সাহায্যেই করতে হবে। এই প্রশ্নের মীমাংসা প্রাচীনকালের গণিতবিদ ইউক্লিডের *Elements* নামক মহাগ্রন্থে পাওয়া যায়। ইউক্লিড দেখিয়েছেন, মৌলিক সংখ্যার শেষ নাই। কিন্তু ‘শেষ নাই’ কথাটি তিনি সতর্কভাবে পরিহার করেছেন। তিনি বলেছেন,

> Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers. (Proposition 20, Book IX)

অর্থাৎ, যতগুলি মৌলিক সংখ্যাই জানা থাকুক না কেন, তার বাইরেও মৌলিক সংখ্যা থেকে যাবে।

ইউক্লিডের প্রমাণ আজও আমাদের বিস্ময়ের উদ্রেক করে। তিনি ধরে নিলেন, এক বা একাধিক মৌলিক সংখ্যা $p_1, p_2, ..., p_r$ জানা আছে বা দেওয়া আছে। তিনি এই মৌলিক সংখ্যাগুলির ক্রমিক গুণফলের সঙ্গে 1 যোগ করে নতুন একটি সংখ্যা a গঠন করলেন :

$$a = p_1 p_2 \ldots p_r + 1.$$

এই সংখ্যাটি মৌলিক হলে তখনই আমরা নতুন একটি মৌলিক সংখ্যা পেয়ে গেলাম। যেমন

$p_1 = 2$, $p_2 = 3$ নিয়ে আমরা পাই $a = 2 \times 3 + 1 = 7$, যা মৌলিক সংখ্যা। a মৌলিক সংখ্যা না হলে তার অন্তত একটি ভাজক (উৎপাদক) মৌলিক সংখ্যা হবে। কেননা, 1 এর চেয়ে বড় যে-কোন অমৌলিক সংখ্যার 1 ভিন্ন ক্ষুদ্রতম ভাজক স্বভাবতই মৌলিক সংখ্যা হবে। যেমন $p_1 = 3, p_2 = 5$ নিয়ে পাই

$$a = 3 \times 5 + 1 = 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

যাকে সংক্ষেপে 2^4 রূপে লেখা হয়। সুতরাং এ ক্ষেত্রে আমরা একটিমাত্র নতুন মৌলিক সংখ্যা 2 পেলাম। আবার $p_1 = 3, p_2 = 7$ নিয়ে পাই

$$a = 3 \times 7 + 1 = 22 = 2 \times 11.$$

এক্ষেত্রে আমরা দুইটি নতুন মৌলিক সংখ্যা 2, 11 পেলাম।

এভাবেই প্রমাণিত হল যে, মৌলিক সংখ্যার শেষ নাই।

শুধু তাই নয়; যে সমান্তর প্রগমণের প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d-এর 1 ভিন্ন কোন সাধারণ (কমন) ভাজক নাই, সেরূপ প্রত্যেকটি সমান্তর প্রগমণের অসংখ্য পদ মৌলিক সংখ্যা হবে। সমান্তর প্রগমণ বলতে $a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...$ ধরনের সংখ্যা পরম্পরাকে বোঝায়। এই সমান্তর প্রগমণের n-তম পদ হবে $a + (n - 1)\, d$; $k > 1$ যদি a এবং d-এর সাধারণ ভাজক হয়, তাহলে উক্ত প্রগমণের প্রত্যেকটি পদ k দ্বারা বিভাজ্য হবে; তখন উক্ত সমান্তর প্রগমণের কোন পদই মৌলিক সংখ্যা হবে না। সুতরাং a এবং d-এর গ.সা.গু. (গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক) 1 হওয়া উক্ত সমান্তর প্রগমণের কোন পদ মৌলিক সংখ্যা হওয়ার জন্য প্রয়োজনীয় শর্ত। চমকপ্রদ ব্যাপার এই যে, এই শর্ত পর্যাপ্তও বটে। প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরের গ.সা.গু. 1, এরূপ প্রত্যেকটি সমান্তর প্রগমণের অসংখ্য পদ মৌলিক সংখ্যা হবে। এই অতি আশ্চর্যজনক ফল ফরাসী বংশোদ্ভূত গণিতবিদ দিরিশ্লে (P. G. L. Dirichlet, 1804–1859) প্রমাণ করেন। এই ফল প্রমাণের জন্য তাঁকে নতুন হাতিয়ার অর্থাৎ গাণিতিক তত্ত্ব উদ্ভাবন করতে হয়।

1 এর চেয়ে বড় কিছু কিছু সংখ্যা আছে যাদের প্রকৃত ভাজকগুলির যোগফল সংখ্যাটির সমান। এখানে প্রকৃত ভাজক বলতে সংখ্যাটি বাদে 1 সহ সংখ্যাটির অন্য সকল ভাজককে বোঝানো হয়েছে। এরূপ প্রথম সংখ্যাটি হচ্ছে 6, কেননা 6-এর প্রকৃত ভাজকগুলি হচ্ছে 1, 2, 3 এবং $6 = 1 + 2 + 3$. এরূপ সংখ্যাকে নিখুঁত সংখ্যা (perfect number) বলা হয়। এর পরের নিখুঁত সংখ্যা 28, কেননা 28-এর প্রকৃত ভাজকগুলি হচ্ছে 1, 2, 4, 7, 14 এবং $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

নিখুঁত সংখ্যা সম্পর্কে ইউক্লিডের মহাগ্রন্থে নিচের ফল প্রমাণিত হয়েছে।

মনে করি p এমন একটি মৌলিক সংখ্যা যেন $2^p - 1$ সংখ্যাটিও মৌলিক সংখ্যা। তাহলে $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ একটি নিখুঁত সংখ্যা। (Proposition 36, Book IX)

$p = 2$, $p = 3$ নিয়ে আমরা যথাক্রমে পাই, $N = 6$, $N = 28$.

p-এর পরবর্তী (মৌলিক) মান $p = 5$ এর জন্যও $2^p - 1$ সংখ্যাটি মৌলিক হয়; সুতরাং $N = 2^4 \times 31 = 16 \times 31 = 496$ পরবর্তী নিখুঁত সংখ্যা। 28-এর পরবর্তী নিখুঁত সংখ্যাটি বের করার দায়িত্ব সুপ্রিয় পাঠকের হাতে ন্যস্ড় করছি।

$2^p - 1$ ধরনের সংখ্যাকে (যেখানে p নিজেই মৌলিক সংখ্যা) মারসেন (Mersenne, 1588–1648) সংখ্যা বলা হয়। পেশায় ধর্মযাজক মারসেন ছিলেন সৌখিন গণিতবিদ। আরেক সৌখিন গণিতবিদ (পেশায় বিচারক) ফার্মা (Pierre de Fermat, 1607–1666)-কে লেখা এক চিঠিতে তিনি দাবি করেন যে p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257 মৌলিক সংখ্যাগুলির সংশি- ষ্ট মারসেন সংখ্যাগুলি সবই মৌলিক সংখ্যা হবে; 257 এর অনূর্ধ অপর চুয়ালি- শটি মৌলিক সংখ্যার সংশি- ষ্ট মারসেন সংখ্যাগুলি সবই অমৌলিক সংখ্যা হবে। কালের নিরিখে দেখা গেছে যে, মারসেনের দাবি সম্পূর্ণ সঠিক নয়। বিস্ময়ের ব্যাপার এই যে, মারসেনের দাবি বহুলাংশে সঠিক। খুব বড় কোন সংখ্যা মৌলিক কি-না তার প্রমাণ সহজসাধ্য নয়; গণিতবিদেরা এজন্য নানা ধরণের কৌশল উদ্ভাবন করেছেন। ১৮৭৬ সালে ফরাসি গণিতবিদ লুকা (E. Lucas, 1842–1891) প্রমাণ করেন যে, মারসেন সংখ্যা

$$2^{127} - 1 = 170141183460469231731687303715884105727$$

মৌলিক সংখ্যা। পরবর্তী ৭৫ বছর পর্যন্ড় এটাই ছিল মানুষের জানা বৃহত্তম মৌলিক সংখ্যা। কম্পিউটারের আবির্ভাবের ফলে আজকাল প্রায়শই নতুন নতুন মৌলিক সংখ্যার সন্ধান পাওয়া যাচ্ছে।

আমরা আবার নিখুঁত সংখ্যার প্রসঙ্গে ফিরে যাই। ইউক্লিডের উলে- খিত প্রতিজ্ঞা অনুযায়ী প্রাপ্ত প্রত্যেকটি নিখুঁত সংখ্যা স্বভাবতই জোড় সংখ্যা। প্রশ্ন জাগে, ইউক্লিডের বর্ণিত উপপাদ্য অনুযায়ী প্রাপ্ত জোড় নিখুঁত সংখ্যার বাইরেও কোন জোড় নিখুঁত সংখ্যা আছে কিনা। সর্বকালের অন্যতম শ্রেষ্ঠ গণিতবিদ লিওনার্দ অয়লার (Leonard Euler, 1707-1782) প্রমাণ করেন যে, প্রক্যেকটি জোড় নিখুঁত সংখ্যা ইউক্লিড বর্ণিত ধরনের হবে। অর্থাৎ N যদি জোড় নিখুঁত সংখ্যা হয় তবে এমন একটি মৌলিক সংখ্যা p রয়েছে যেন $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$ হয়।

যে প্রশ্নটির মীমাংসা আজ পর্যন্ড় হয়নি, তা হলো আদৌ কোন বিজোড় নিখুঁত সংখ্যা আছে কি-না। R.P. Brent এবং G.L. Cohen ১৯৮৯ সালে প্রমাণ করেন যে, যদি কোন বিজোড় নিখুঁত সংখ্যা থাকে, তা অবশ্যই 10^{300}-এর চেয়ে বড় হবে। 10^{300}

সংখ্যাটি লিখতে 1-এর ডানে তিনশতটি শূন্য বসাতে হবে। এটি যে কত বড় একটি সংখ্যা, তা উপলব্ধি করাও দুরূহ।

অনেকেই ভাবতে পারেন, ইউক্লিডের মহাগ্রন্থে বুঝি শুধু জ্যামিতিই স্থান পেয়েছে। প্রকৃতপক্ষে বীজগণিত এবং সংখ্যাতত্ত্বের অনেক কিছুই তাঁর মহাগ্রন্থে আছে। তবে বীজগণিত এবং সংখ্যাতত্ত্বের আলোচনা জ্যামিতির ভাষাতেই করা হয়েছে।

তথ্যসূত্র

The Thirteen Books of Euclid's *Elements*

Translated from the Text of Heiberg with Introduction and Commentary by Sir Thomas L. Heath, K.C.B., K.C.V.O., F.R.S., Sc.D. Camb., Hon. D.Sc. Oxford, Honorary Fellow of Trinity College, Cambridge, Dover Publication (Three Volumes), New York 1956 (First published in 1908 by Cambridge University Press).

W