গণিত পরিক্রমা ২৭শ খণ্ড ২০১৭ পৃ. ৫৫-৫৮

একটি ত্রিকোণমিতিক সমস্যা ও এর সমাধান

কামাল উদ্দীন আহমেদ
বি এসসি (মেকানিক্যাল ইঞ্জিনিয়ারিং, বুয়েট)

সমস্যাঃ ABC ত্রিভুজে $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$ হলে, দেখাও যে ত্রিভুজটি সমবাহু।

উপর্যুক্ত ত্রিকোণমিতিক সমস্যাটি অত্যন্ড় গুরুত্বপূর্ণ একটি সমস্যা এবং এইচ.এস.সি.'র উচ্চতর গণিতের নতুন-পুরাতন প্রায় সকল বইয়েই অংকটি সন্নিবিষ্ট আছে। অংকটি বেশ পুরাতন। প্রথিতযশা প্রবীণ লেখক প্রফেসর এস.ইউ. আহাম্মদ রচিত এবং ১৯৬৫ সালে প্রকাশিত Modern Plane Trigonometry বইটিতে সমস্যাটি দেওয়া আছে। ধারণা করি, সমস্যাটি আরো অনেক পুরানো।

আমার কাছে প্রবীণ ও নবীন অনেক লেখকের বেশ কিছু উচ্চমাধ্যমিক গণিতের বই সংরক্ষিত আছে। সকল মূল বইয়ে কিংবা লেখকের রচিত সমাধান বইয়ে অথবা বাজারে প্রাপ্ত গাইড বইসমূহে উলি- খিত অংকটির একটা সমাধানই দেখা যায়, যা নিম্নরূপ–

সমাধানঃ ΔABC-এ $A + B + C = \pi$

$$\Rightarrow \quad A + B = \pi - C \quad \therefore \cot(A + B) = \cot(\pi - C)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C$$

$$\Rightarrow \quad \cot A \cot B - 1 = -\cot A \cot C - \cot B \cot C$$

$$\Rightarrow \quad \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot A \cot C = 1 \qquad \text{(i)}$$

দেওয়া আছে, $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad (\cot A + \cot B + \cot C)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \quad \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2(\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A) = 3$$

$$\Rightarrow \quad \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2 \times 1 = 3$$ [(i) ব্যবহার করে]

$$\Rightarrow \quad \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C = 1$$

$$\Rightarrow \quad \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C = \cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A$$ [(i) ব্যবহার করে]

$$\Rightarrow \quad 2\cot^2 A + 2\cot^2 B + 2\cot^2 C - 2\cot A \cot B - 2\cot B \cot C - 2\cot C \cot A = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\cot A - \cot B)^2 + (\cot B - \cot C)^2 + (\cot C - \cot A)^2 = 0$$

সমস্যাটির বামপক্ষ তিনটি বর্গের সমষ্টি। প্রত্যেকটি বর্গের মান পৃথকভাবে শূন্য হলেই তবে তাদের সমষ্টি শূন্য হবে, অন্যথায় নয়।

$\therefore (\cot A - \cot B)^2 = 0 \Rightarrow \cot A - \cot B = 0 \Rightarrow \cot A = \cot B$

A, B ত্রিভুজের কোণ বিধায় $\cot A = \cot B$ সিদ্ধান্ড় হয় যে, $A = B$.

অনুরূপভাবে, $(\cot B - \cot C)^2 = 0$ এবং $(\cot C - \cot A)^2 = 0$ হতে যথাক্রমে সিদ্ধান্ড় হয় যে, $B = C$ এবং $C = A$.

সুতরাং $A = B = C$. ত্রিভুজের তিনটি কোণই সমান হওয়ায় *ত্রিভুজটি সমবাহু*।

এ সমাধানটিই সর্বত্র দেখা যায়। কোন বিকল্প সমাধান কোথাও দেখিনি। হয়ত বিকল্প সমাধান বের করার প্রয়োজনীয়তা দেখা দেয়নি, কারণ উপর্যুক্ত সমাধানটি কঠিন নয়।

আমি অনেক দিন ধরেই সমস্যাটি নিয়ে এভাবে ভাবছিলাম যে, এর একটিমাত্র সমাধান কেন থাকবে? বিকল্প সমাধান থাকা উচিত। দীর্ঘদিন ধরে একটা সমাধানই চলে আসছে। অনেক চেষ্টা করেও সফল হচ্ছিলাম না। অবশেষে ২০১৫ সালের ডিসেম্বরে এর একটি বিকল্প সমাধান বের করতে সক্ষম হই গণিত পরিক্রমার পাঠকগণের জন্য যা তুলে ধরা অনুভব করছি।

বিকল্প সমাধান

দেওয়া আছে, $\cot A + \cot B + \cot C = \sqrt{3}$.

ত্রিভুজের সাইন সূত্র $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ এবং কোসাইন সূত্র

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

আমরা জানি। আরো জানা আছে যে, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ যেখানে R ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের (অর্থাৎ ত্রিভুজটির তিনটি শীর্ষবিন্দুগামী বৃত্তের) ব্যাসার্ধ।

$$\therefore \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \div \frac{a}{2R} = \frac{R}{abc}(b^2 + c^2 - a^2)$$

অনুরূপভাবে, $\cot B = \frac{R}{abc}(c^2 + a^2 - b^2)$ এবং $\cot C = \frac{R}{abc}(a^2 + b^2 - c^2)$

$\therefore$ প্রদত্ত সমস্যা দাঁড়ায়

$$\frac{R}{abc}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{R}{abc}(c^2 + a^2 - b^2) + \frac{R}{abc}(a^2 + b^2 - c^2) = \sqrt{3}$$

বামপক্ষ $= \frac{R}{abc}(b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2)$

$$= \frac{R}{abc}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\therefore \frac{R}{abc}(a^2 + b^2 + c^2) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3} \cdot \frac{abc}{4R}$$

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ সম্পর্কে আমরা জানি $\frac{abc}{4R} = \Delta$ এবং

$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ যেখানে $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3} \cdot \Delta$$

$$= 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 3(2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4)$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$$

$$= 6b^2c^2 + 6c^2a^2 + 6a^2b^2 - 3a^4 - 3b^4 - 3c^4$$

$$\Rightarrow 4a^4 + 4b^4 + 4c^4 = 4b^2c^2 + 4c^2a^2 + 4a^2b^2$$

$$\Rightarrow 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2 = 0$$

$$\Rightarrow (a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 = 0$$

$\therefore (a^2 - b^2)^2, (b^2 - c^2)^2, (c^2 - a^2)^2$ প্রত্যেকে 0 হবে :

$a^2 - b^2 = 0, b^2 - c^2 = 0$ এবং $c^2 - a^2 = 0$

$\Rightarrow a^2 = b^2,\ b^2 = c^2$ এবং $c^2 = a^2$

$\therefore a = b,\ b = c$ এবং $c = a$, কেননা a, b, c প্রত্যেকের মান ধনাত্মক।

যেহেতু $a = b = c$

অতএব ABC সমবাহু ত্রিভুজ।

পাদটীকা

ইঞ্জিনিয়ার কামাল উদ্দীন আহমেদ একজন নিবেদিতপ্রাণ গণিতপ্রেমী এবং গণিত পরিক্রমার একনিষ্ঠ পাঠক। ২০০৬ সালের গণিত পরিক্রমার ষষ্ঠদশ খণ্ডে প্রকাশিত ‘আজিজর রহমান খলিফা ও গণিত কাঁদিয়া ফেরে’ শীর্ষক সুদীর্ঘ লেখাটি তাঁকে গণিতচর্চায় বিশেষভাবে অনুপ্রাণিত করেছে।

ইঞ্জিনিয়ার আহমেদ যে বিকল্প প্রমাণ দিয়েছেন, তাতে ত্রিভুজ সম্পর্কিত সবগুলি মৌলিক সূত্র প্রয়োগ করা হয়েছে। তাই এই প্রমাণটি নিঃসন্দেহে জ্ঞানগর্ভ। অন্যদিকে প্রচলিত প্রমাণটি তুলনামূলকভাবে অনেক সহজ। এখন দেখা যাক, প্রচলিত প্রমাণে A, B, C যে একটি ত্রিভুজের কোণ কোথায় এই তথ্য ব্যবহার করা হয়েছে। এজন্য আমাদের দেখতে হবে $\cot A = \cot B$ হতে সাধারণভাবে কী সিদ্ধান্ত হয়।

$$\cot A = \cot B \iff \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\cos B}{\sin B}$$

$$\iff \sin A \cos B - \cos A \sin B = 0 \iff \sin(A - B) = 0$$

$\iff A - B = k\pi$ রেডিয়ান, যেখানে k একটি পূর্ণসংখ্যা।

A, B ত্রিভুজের কোণ বিধায় তাদের পার্থক্য π রেডিয়ান $= 180°$ এর কম হতে বাধ্য। সুতরাং তখন A = B হবে। অনুরূপভাবে, B = C এবং C = A. এককথায় A = B = C.

ইঞ্জিনিয়ার আহমেদ সাহেব আমাদের কাছে আরো কিছু জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক সমস্যার সমাধান পাঠিয়েছেন। গণিত পরিক্রমার পরবর্তী সংখ্যায় তা থেকে কতক নির্বাচিত অংশ আশা করি ছাপা হবে। আমরা তাঁকে গণিতের ভুবনে স্বাগত জানাই।

মুনিবুর রহমান চৌধুরী

W