গণিতপরিক্রমা ২৭শ খণ্ড ২০১৭ পৃ. ৫৯-৬০

আরোহ পদ্ধতিতে ফার্মার উপপাদ্যের প্রমাণ

মুনিবুর রহমান চৌধুরী

অনুসমতার ধারণা সংখ্যাতত্ত্বের প্রাণস্বরূপ। n স্বাভাবিক সংখ্যা এবং a, b পূর্ণসংখ্যা হলে $a \equiv b \pmod{n}$ দ্বারা বুঝায় যে, $a - b$ সংখ্যাটি n দ্বারা (নিঃশেষে) বিভাজ্য।

ফার্মার উপপাদ্য : p মৌলিক সংখ্যা হলে p দ্বারা বিভাজ্য নয় এমন প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা a এর জন্য $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ হবে।

$p = 2$ হলে a বিজোড় সংখ্যা হবে; তখন $a^{p-1} = a \equiv 1 \pmod{2}$

কেননা $a = 2k + 1$ যেখানে k পূর্ণসংখ্যা।

অন্য সকল মৌলিক সংখ্যার জন্য অর্থাৎ $p > 2$ এর জন্য ফার্মার উপপাদ্য প্রমাণের জন্য আরোহ পদ্ধতি প্রয়োগ করা যায়।

আরোহ আরম্ভ : $a = 1$ হলে $a^{p-1} = 1 \equiv 1 \pmod{p}$

আরোহ স্ড়র : মনে করি ফার্মার উপপাদ্য p দ্বারা বিভাজ্য নয় এমন কোন একটি স্বাভাবিক সংখ্যা $a \geq 1$ এর জন্য সত্য। দেখাতে হবে উপপাদ্যটি তখন $a + 1$ এর জন্য সত্য।

এজন্য আমরা $(a + 1)^p$ রাশিটিকে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্ড়র করি:

$$(a + 1)^p = a^p + {}^{p}C_1\, a^{p-1} + {}^{p}C_2\, a^{p-2} + \dots + {}^{p}C_{p-1}\, a + 1$$

$r = 1, 2, \dots, p - 1$ এর জন্য প্রত্যেকটি দ্বিপদী সহগ

${}^{p}C_r = \dfrac{p(p-1)\dots(p-r+1)}{1.2\dots r}$ মৌলিক সংখ্যা p দ্বারা বিভাজ্য; কেননা লব p দ্বারা বিভাজ্য এবং হরের প্রত্যেকটি সংখ্যা p দ্বারা অবিভাজ্য, ফলে হর p দ্বারা অবিভাজ্য।

অতএব $(a + 1)^p = a^p + mp + 1$, যেখানে mp অন্য সকল পদগুলির সমষ্টি।

সুতরাং $(a + 1)^p \equiv a^p + 1 \pmod{p}$.

আরোহ কল্পনা অনুযায়ী, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; সুতরাং $a^p \equiv a \pmod{p}$.

অতএব $(a + 1)^p = a^p + mp + 1$

$$\equiv a + 0 + 1 \pmod{p} \equiv (a + 1) \pmod{p}.$$

আরোহ স্ড়রের নিষ্পত্তি হওয়ায় আরোহ পদ্ধতিতে ফার্মার উপপাদ্যের প্রমাণ সম্পূর্ণ হল।

এই প্রমাণটি Leonard Euler (১৭০৭-১৭৮৩) ১৭৩৬ সালে প্রকাশ করেন। অয়লারের অবদান সম্পর্কে গণিত পরিক্রমার উনবিংশ খণ্ড (২০০৯) বর্তমান লেখকের লিওনার্দ অয়লার শীর্ষক প্রবন্ধে আলোচনা করা হয়েছে।

W